FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vektoranalysis

Anwendungen zu den Maxwell Gleichungen

Anwendungen Divergenz und Rotation

Anwendungsbeispiel

Übersicht:

- Elektromagnetische Wellen
- Verknüpfung der Vektordifferentialoperatoren

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Maxwell Gleichungen

Vollständige Maxwell Gleichungen

Für allgemeine, zeitlich veränderliche E- und B-Felder gelten die folgenden vier Maxwell Gleichungen…

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ Gaußsches Gesetz

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$ Gaußsches Gesetz für Magnetfelder

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Faradysche Induktionsgesetz

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Erweitertes Amperesches Gesetz

Elektromagnetische Wellen

Was sagen die Maxwell Gleichungen aus?

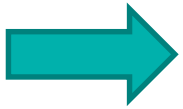
Die Maxwell Gleichungen beschreiben alle Phänomene des Elektromagnetismus…

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Was bedeutet das?

Alle elektromagnetischen Phänomene lassen sich aus den Maxwell Gleichungen ableiten/herleiten, ähnlich wie die Newton‘schen Gesetzte die mechanische Phänomene beschreiben.



Elektromagnetische Wellen

Elektromagnetische Wellen

Herleitung von elektromagnetischen Wellen…

Ausgangspunkt ist ein ladungsfreies Vakuum, d.h. die Ladungsdichte und die Stromdichte sind null…

$$\rho = 0 \qquad \vec{j} = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \vec{0}$$

Elektromagnetische Wellen

Herleitung von elektromagnetischen Wellen…

Ausgangspunkt ist ein ladungsfreies Vakuum, d.h. die Ladungsdichte und die Stromdichte sind null…

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \qquad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = 0 \qquad \vec{j} = \vec{0}$$

Ausgangspunkt ist folgende Maxwell Gleichung:

$$\text{rot}\ \ \text{rot}\,\vec{E} = -\ \text{rot}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Uparrow$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Herleitung von elektromagnetischen Wellen…

Wir haben folgende Gleichung erhalten…

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Herleitung von elektromagnetischen Wellen…

Wir haben folgende Gleichung erhalten…

$$\text{rot}\ \text{rot}\ \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Für die doppelte Rotation gibt es eine Formel (Formelsammlung):

$$\text{rot}\ \text{rot}\ \vec{F} = \nabla\left(\text{div}\ \vec{F}\right) - \Delta\vec{F}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\left(\text{div}\ \vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Herleitung von elektromagnetischen Wellen…

Unsere Überlegungen/Umformungen haben folgende Gleichung ergeben…

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Elektromagnetische Wellen

Herleitung von elektromagnetischen Wellen…

Unsere Überlegungen/Umformungen haben folgende Gleichung ergeben…

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$ = Lichtgeschwindigkeit

Diese Gleichung besitzt die Form einer Wellengleichung…

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\Delta f$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit

Laplace Operator:

$$\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$$

Für Vektorfelder:

$$\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{pmatrix}$$

Elektromagnetische Wellen

Herleitung von elektromagnetischen Wellen…

Wir können analog für das Magnetfeld rechnen…

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \text{rot}\,\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\vec{E}$$

$$\text{rot}\;\text{rot}\,\vec{B} = \nabla\left(\text{div}\,\vec{B}\right) - \Delta\vec{B} \qquad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

Wir haben nun alle Maxwell Gleichungen angewendet…

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen

Final haben wir zwei Wellengleichungen erhalten…

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Wir wissen schon…

- Form von Wellengleichungen, d.h. Wellenverhalten
- Ausbreitungsgeschwindigkeit = Lichtgeschwindigkeit

Welche weiteren Aussagen können wir machen?

Elektromagnetische Wellen

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Aussagen zu elektromagnetische Wellen

Wir betrachten eine ebene Welle als mögliche Lösung…

Wellenvektor, senkrecht zur Wellenfront und zeigt in Ausbreitungs-richtung

Ausbreitungsge-schwindigkeit

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \cdot f(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)$$

Amplitude

Wellenfunktion, löst die Wellengleichung

Allgemein löst $\vec{E}$ die Maxwell Gleichungen

Elektromagnetische Wellen

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Aussagen zu elektromagnetische Wellen

Eben Welle…

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \cdot f(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Elektromagnetische Wellen

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Aussagen zu elektromagnetische Wellen

Eben Welle…

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \cdot f(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)$$

Wir betrachten das Gauß‘sche Gesetz:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$0 = \operatorname{div}\vec{E}$$
$$= \operatorname{div}\left(\vec{E}_0 \cdot f(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)\right)$$
$$= \vec{E}_0 \cdot \vec{k}\ f'(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)$$

Da $f' \neq 0$ ist, muss gelten…

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{k}$$

Das E-Feld steht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (Transversalwelle)

Kettenregel bei Ableitung nach $\vec{x}$

Elektromagnetische Wellen

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Aussagen zu elektromagnetische Wellen

Eben Welle…

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \cdot f(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)$$

Aussagen zum B-Feld erhalten wir, wenn wir die ebene Welle in das Faraday‘sche Gesetz einsetzen…

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \text{rot}\left(\vec{E}_0 \cdot f(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)\right)$$

$$= \vec{k} \times \vec{E}_0 \cdot f'(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)$$

Elektromagnetische Wellen

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Aussagen zu elektromagnetische Wellen

Eben Welle…

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \cdot f(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)$$

Aussagen zum B-Feld erhalten wir, wenn wir die ebene Welle in das Faraday'sche Gesetz einsetzen…

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \text{rot}\left(\vec{E}_0 \cdot f(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)\right)$$

$$= \vec{k} \times \underbrace{\vec{E}_0 \cdot f'(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)}$$

Wir vergleichen mit der Zeitableitung…

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{x},t) = -c \cdot \underbrace{\vec{E}_0 \cdot f'(\vec{k} \cdot \vec{x} - c \cdot t)} \quad \Rightarrow \quad = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{x},t)$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \cdot \left(\vec{k} \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{x},t)\right)$$

Elektromagnetische Wellen

Aussagen zu elektromagnetische Wellen

Wir haben folgende Beziehung zwischen E- und B-Feld gefunden…

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \cdot \left(\vec{k} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x}, t) \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{k} \times \vec{E} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \left(\vec{k} \times \vec{E} \right)$$

Elektromagnetische Wellen

Aussagen zu elektromagnetische Wellen

Wir haben folgende Beziehung zwischen E- und B-Feld gefunden…

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \cdot \left(\vec{k} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{x}, t) \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{k} \times \vec{E} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \left(\vec{k} \times \vec{E} \right)$$

Wir hatten…

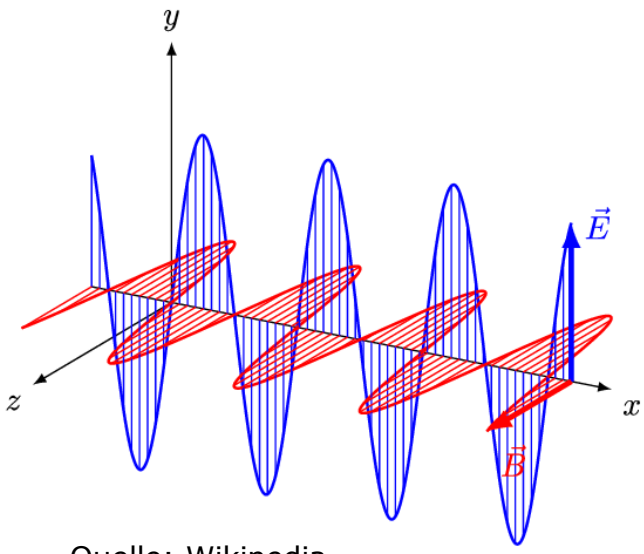
$$\vec{E} \perp \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \perp \vec{k} \quad \text{und} \quad \vec{B} \perp \vec{E}$$

Zusammenfassung

Welche Aussagen zum E- und B-Feld haben wir gefunden?

- Das E-Feld steht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (Transversalwelle)
- Das B-Feld steht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (Transversalwelle)
- E- und B-Feld stehen senkrecht zueinander
- Die Amplituden sind proportional

$$\vec{E}_0 = c \cdot \vec{B}_0$$



Quelle: Wikipedia

Vektoranalysis

Vektordifferentialoperatoren

Welche Operatoren kennen wir?

Gradient: $$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$$

Divergenz: $$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

Rotation: $$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2 \\ \partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3 \\ \partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Operatoren stehen in Beziehung zueinander und können miteinander verknüpft werden…

Vektordifferentialoperatoren

Wirbelfreie Gradientenfelder

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist wirbelfrei, wenn die Rotation verschwindet…

$$\text{rot}\ \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \text{wirbelfreies Feld}$$

Vektordifferentialoperatoren

Wirbelfreie Gradientenfelder

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist wirbelfrei, wenn die Rotation verschwindet…

$$\text{rot}\ \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \text{wirbelfreies Feld}$$

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ wird Gradientenfeld genannt, wenn es sich als Gradient eines Skalarfeldes ϕ schreiben lässt…

$$\vec{F}\ \text{Gradientenfeld} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \nabla\phi$$

Wirbelfreie Gradientenfelder

Jedes Gradientenfeld ist wirbelfrei, d.h. die Rotation verschwindet.

$$\vec{F} = \nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \text{rot}\ \vec{F} = \text{rot}\,\nabla\phi = \begin{pmatrix} \partial_{yz}\phi - \partial_{zy}\phi \\ \partial_{xz}\phi - \partial_{zx}\phi \\ \partial_{xy}\phi - \partial_{yx}\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wirbelfreie Gradientenfelder

Es gilt unter gewissen Voraussetzungen auch die Umkehrung…

Satz:

Ein wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F}$ lässt sich stets als Gradientenfeld eines skalaren Feldes ϕ schreiben:

$$\text{rot}\ \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \nabla\phi$$

Das Skalarfeld ϕ wird als Potential bezeichnet. Es ist eindeutig bis auf eine Konstante bestimmt.

Umgekehrt ist ein Gradientenfeld $\vec{F} = \nabla\phi$ immer wirbelfrei:

$$\vec{F} = \nabla\phi \quad \Rightarrow \quad \text{rot}\ \vec{F} = \vec{0}$$

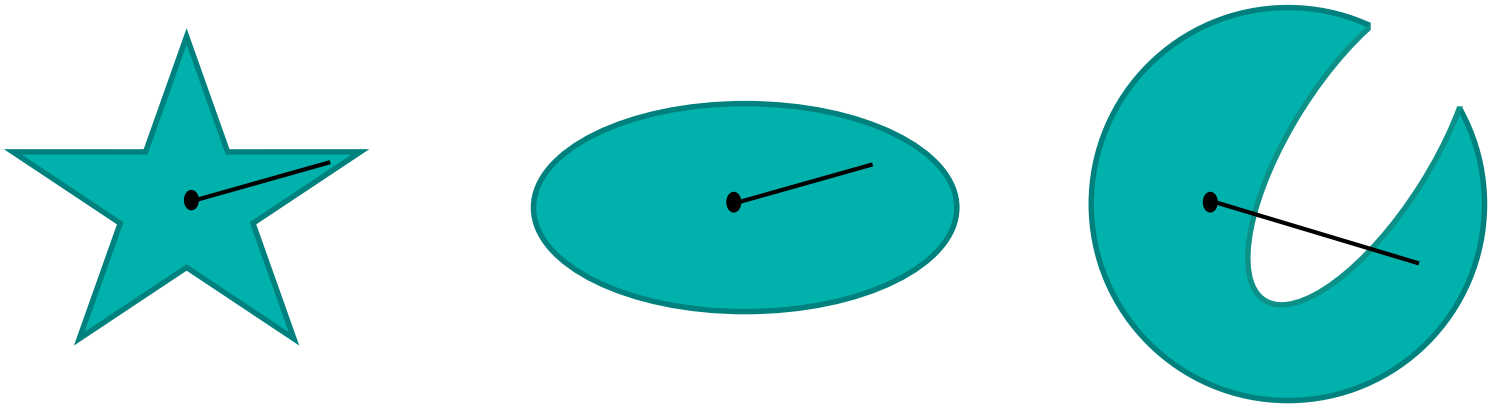
Wirbelfreie Gradientenfelder

Die Umkehrung, dass aus $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ folgt, dass $\vec{F}$ ein Potential ϕ besitzt und sich als Gradientenfeld schreiben lässt, gilt nur, wenn $\vec{F}$ auf einer sternförmigen Menge stetig differenzierbar ist.

Wirbelfreie Gradientenfelder

Die Umkehrung, dass aus $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ folgt, dass $\vec{F}$ ein Potential ϕ besitzt und sich als Gradientenfeld schreiben lässt, gilt nur, wenn $\vec{F}$ auf einer sternförmigen Menge stetig differenzierbar ist.

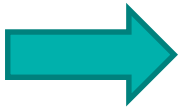
Eine Menge wird sternförmig genannt, wenn sie einen Punkt A enthält (den Sternmittelpunkt), sodass die Verbindung zu jedem anderen Punkt X in der Menge ganz in X liegt.



Vektordifferentialoperatoren

Quellfreie Wirbelfelder

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ wird Wirbelfeld genannt, wenn es sich als Rotation eines zweiten Vektorfeldes $\vec{E}$ schreiben lässt…



$$\vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{E}$$

Quellfreie Wirbelfelder

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ wird Wirbelfeld genannt, wenn es sich als Rotation eines zweiten Vektorfeldes $\vec{E}$ schreiben lässt…

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$$

Solche Wirbelfelder sind quellfrei, d.h. ihre Divergenz verschwindet…

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F} &= \operatorname{div}\ \operatorname{rot} \vec{E} \\ &= \partial_{x_1}\left(\partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2\right) + \partial_{x_2}\left(\partial_{x_3} E_1 - \partial_{x_1} E_3\right) + \partial_{x_3}\left(\partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

quellfrei

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2 \\ \partial_{x_3} E_1 - \partial_{x_1} E_3 \\ \partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1 \end{pmatrix}$$

Quellfreie Wirbelfelder

Es gilt auch die Umkehrung…

Satz:

Ein quellfreies Vektorfeld $\vec{F}$ lässt sich als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{E}$ schreiben:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$$

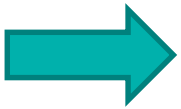
Das Vektorfeld $\vec{E}$ wird dann Vektorpotential. Es ist bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes eindeutig bestimmt.

Umgekehrt ist ein Wirbelfeld stets quellfrei, d.h. es gilt:

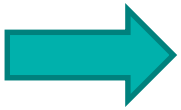
$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\ \vec{F} = \operatorname{div}\ \operatorname{rot}\ \vec{F} = 0$$

Anwendung in der Elektrostatik

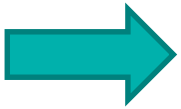
Wenn wir ein statisches E-Feld haben gilt: $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$



Ein statisches E-Feld ist wirbelfrei



Ein statisches E-Feld besitzt ein Potential ϕ



$\vec{E} = -\nabla\phi$

Vektoranalysis

Vektordifferentialoperatoren

Anwendung in der Elektrostatik

Wenn wir ein statisches E-Feld haben gilt: $\text{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$

⇒ Ein statisches E-Feld ist wirbelfrei

⇒ Ein statisches E-Feld besitzt ein Potential ϕ

⇒ $\vec{E} = -\nabla\phi \;= \nabla(\phi(\vec{x}) + C)$

↳ Eindeutig bis auf Konstante bestimmt

Aus dieser Tatsache folgt direkt:

⇒ Das E-Feld steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen

Vektoranalysis

Vektordifferentialoperatoren

Anwendung auf das Magnetfeld

Für jedes Magnetfeld gilt: $\operatorname{div} \vec{B} = \vec{0}$

→ Ein B-Feld ist quellfrei

→ Es existiert ein Vektorpotential $\vec{A}$

→ $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \left(\vec{A} + \nabla \psi(\vec{x}) \right)$

↑ Eindeutig bis auf Gradient eines Skalarfeldes

$$\operatorname{rot} \nabla f = \vec{0}$$

Man besitzt eine gewisse Eichfreiheit…

- Lorenz Eichung
- Coloumb Eichung

Anwendung im dynamischen Fall

Wie sieht das Ganze für Zeitabhängige Felder aus?



Für das Magnetfeld ändert sich nichts

Anwendung im dynamischen Fall

Wie sieht das Ganze für Zeitabhängige Felder aus?



Für das Magnetfeld ändert sich nichts

Beim E-Feld müssen wir die Maxwell Gleichung ändern…

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Anwendung im dynamischen Fall

Wie sieht das Ganze für Zeitabhängige Felder aus?

→ Für das Magnetfeld ändert sich nichts

Beim E-Feld müssen wir die Maxwell Gleichung ändern… $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Wir setzen unsere Ansatz mit Vektorpotential ein…

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\ \vec{A} \quad \rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \quad \operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Anwendung im dynamischen Fall

Wir haben…

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0}$$

Anwendung im dynamischen Fall

Wir haben…

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)=\vec{0}$$

Damit existiert ein Potential für das wirbelfreie, kombinierte Vektorfeld…

$$\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}=-\nabla\phi$$

$$\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Anwendung im dynamischen Fall

Wir können also auch für den dynamischen Fall ein Vektorpotential und ein modifiziertes elektrisches Potential finden:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\ \vec{A} \qquad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Vektoranalysis

Vektordifferentialoperatoren

Anwendung im dynamischen Fall

Wir können also auch für den dynamischen Fall ein Vektorpotential und ein modifiziertes elektrisches Potential finden:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\ \vec{A} \qquad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Das sieht kompliziert aus? Wo sind die Vorteile?

- Reduzierung der Freiheitsgrade von 6 auf 4
- Die Maxwell Gleichungen für die Potentiale sind entkoppelt und formsymmetrisch und daher einfacher zu lösen

Mehr dazu...

Feynman, Lectures on Physics, Elektrodynamik, Kap. 18-6

Maxwell Gleichungen unter der Coloumb Eichung

Wir wählen die Potentiale so, dass zusätzlich gilt: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

Dann erhalten wir die folgenden Maxwell Gleichungen:

$$\Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ Poisson Gleichung

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}$$ inhomogene Wellengleichung